Qu'est ce qu'un point ? Jean-Michel Kantor

On distingue souvent deux domaines dans les mathématiques

l'arithmétique et de la géométrie, l'une qui étudie les nombres, l'autre les figures et l' espace (Note :y aurait-il une relation avec les hémisphères cérébraux ?). A la manière de Dedekind on pourrait dire :"Dieu nous a donné les nombres et les points, tout le reste est l'affaire des hommes."

Mais qu'est-ce qu'un nombre ? Qu'est ce qu'un point ?

Ces questions simples ont suscité des débats philosophiques, puis scientifiques (en mathématique et en physique) depuis des siècles Euclide s'est posé la question de construire la géométrie, et il commence avec le point :

–Un point est ce qui n'a aucune partie (Référence)

Le point est donc la partie insécable, l'atome de l'espace.Mais comment refaire l'espace avec lui ? Note 1:

C'est déja la question que se pose Leibniz avec les monades même étymologie),et c'est "l'opération de l'âme qui perçoit "(1712)qui joue ce rôle pour lui .

L'un des aspects de ce débat sera l'opposition continu/discontinu.Remarquons aussi que le mot grec utlisé par Euclide est semion, le point est un signe, porteur de sens (voir par. III).

Y- a t-il un autre point aujourd'hui, avec lequel reconstruire l'espace différemment ?

Sur plusieurs exemples tirés de la géométrie algébrique et de la géométrie non-commutative, nous évoquerons de nouvelles articulations mathématiques entre les points et les espaces qu'ils constituent.

Souvent dans la recherche actuelle les mathématiciens se passent des points .

Deux précisions :

1/Plutôt que de figures de points, ou de questions de forme qui relèvent de la géométrie et de ses enjeux globaux (comme la géométrie non-euclidienne, ou la théorie des nœuds, des singularités..) nous nous limitons à l'élément unique, la partie insécable :le point comme constituant de l'espace.

2/

Bien entendu il ne peut être question - bien trop général- du point comme élément d'un ensemble quelconque, même si cette acception s'est vite répandue après le succès de la théorie des ensembles comme langage universel des mathématiques depuis les années vingt . ensembles par les catégories (cf ...).Cette confusion s'explique d'ailleurs :la théorie des ensembles est née d'abord avec les ensembles de nombres représentés par les points de la droite numérique

Ajoutons qu'aujourd'hui, et ce serait l'intérêt d'une étude technique plus poussée,les points sont menacés par les flèches et les ensembles par les catégories (cf ...).A l'autre bout de la chaîne, nous pourrions envisager l'étude de la prégnance du système visuel si important chez les humains -sur notre intelligence de l'espace, dont fait partie la géométrie

(Note 2 :sans doute, comme chez les Chinois de l'ère classique,qui ne distinguaient pas point et tache du pinceau, les batraciens ne distinguent-ils pas le point,et les singes ne disposent -ils pas de la même géométrie non-euclidienne)

.

II Les points et la géométrie algébrique au 20 ième siècle

Dès le début du siècle l'algébrisation de la géométrie fait subir (grâce à un résultat de Hilbert) une transformation radicale à la conception du point en mathématiques .

La géométrie algébrique consiste à étudier des systèmes d'équations polynômiales (définies par des polynômes avec des coefficients rationnels ou réels ou complexes ou plus généralement dans un corps k). Le lieu X des points qui annulent les équations est appelé variété algébrique définie par ces équations Si ce corps k est celui des nombres complexes, ou plus généralement un corps "algébriquement clos " (les polynômes non-constants y ont toujours des solutions) alors le Théorème des zéros de Hilbert (vers 1890) assure que les points correspondent exactement aux "idéaux "maximaux (généralisations de l'ensemble des multiples d'un nombre entier) de l'anneau des fonctions sur la variété:un point de X devient un idéal d'un anneau ! Il y là le début d'une nouvelle conception de ce qu'est un point (inversement, l'idéal devient lui-même un point, ce qui présente des analogies avec la construction des espaces de configurations et celle du spectre d'un anneau, voir XX)

Ces points, il fallait souvent les compter ;la question de l'énumération des points (qui prendra le nom de théorie de l'intersection, puis de théorie des multiplicités

Exemple du théorème de Bezout-

joue un rôle crucial dans le projet mis en place dès les années 40 par André Weil de bâtir une géométrie algébrique moderne D'une part il s'agit de donner des fondements rigoureux à des preuves heuristiques des géométres italiens (Castelnuovo,Enriques,..). figure :document d'époque d'une figure "à l'italienne "

pour compter des points d'intersection par exemple d'une famille de courbes avec une surface :ils cherchaient la réponse dans les cas fréquents (points "en position générale disaient-ils) et étendaient aux autres cas.Il fallait construire donc l'analogue algébrique de cette "position générale ".autrement dit algébriser des notions intuitives, en rapport avec la topologie.

Les fondements algébriques sont établis par André Weil. A partir des années cinquante Alexandre Grothendieck reprend ce flambeau avec la volonté visionnaire de bâtir une théorie bien plus générale .Après plusieurs tentatives (Chevalley,Cartier) Grothendieck construit une théorie valable pour un corps k quelconque non nécessairement algébriquement clos .Il saisit que les points ne suffisent plus . Les points -qui ont une dimension nulle -sont remplacés par les "sous-variétés irréductibles (indécomposables) de dimension quelconque "

(Note 3:algébriquement, à la place des idéaux maximaux il faut considérer tous les idéaux premiers);

ces sous-variétés doivent être organisées et réunies convenablement, d'où le mot schéma.Remarquons qu'il s'agit encore d'ensembles de points,mais on va vite s'éloigner de cette manière de pensée. L'étape suivante, encore due à Grothendieck, avec la construction de la topologie étale, fera véritablement exploser la notion de point :on a pu dire qu'avec cette construction Grothendieck fait sortir les points de l'espace (Encadré 2) Inspiré entre autres par les succès de la topologie Grotendieck remplace la donnée d'un point x de la "variété" X par celle de ses voisinages (qui équivaut à la donnée de la topologie) dans X, et ceux-ci sont eux-mêmes remplacés -c'est la "topologie étale "-par la donnée des applications qui sont "étalées " au dessus de lui (la notion est reprise de Riemann qui avait ainsi défini lers surfaces de Riemann . les travaux de grothendieck permettront ensuite de traiter le cas des anneaux commutatifs quelconques (Encadré :l'implosion du point chez grothendieck) Autrement dit les points disparaissent, remplacés par des familles d'applications dans X(On voit apparaîtreici comme ailleurs le point de vue des catégories) . C'est une généralisation d'une très grande hardiesse, qui sera suivie d'une nouvelle construction encore plus abstraite (avec J.L.Verdier),celle de topos, qui contient la notion d'ensemble et d'appartenance, et donnera lieu à des développements même en logique (Figure ..)

On ne peut quitter le champ de la géométrie algébrique sans mentionner que le projet initial de Weil, qui était de relier en profondeur géométrie et théorie des nombres, a été réalisé, comme le montrent les succès de ces dernières années(résolution de la conjecture de fermat par exemple)

III Des points indiscernables ?

Dans cette deuxième partie nous pensons plutôt au point comme représentant, comme signe ;c'est la physique (la mécanique) qui en a fait cette utilisation systématique avec l'espace de configuration des états d'un système (d'abord chez Lagrange),et la physique quantique a introduit naturellement des espaces où certains points sont distincts mais indiscernables.

Voici des exemples où il a été productif au mathématicien de faire disparaître le point :

Exemple 1: Il arrive fréquemment qu'un ensemble E possède de nombreuses symétries (en termes mathématiques : on se donne un groupe qui agit sur E);

L'espace des orbites E/G est formé de "points" (classes d'équivalence) où le même point représente les g.X (pour x fixé et g variable dans le groupe G);mais il peut arriver que cet espace E/G soit sans intérêt (par exemple réduit à un point, ou "singulier",ou sans structure naturelle) et qu'il faille remplacer la considération de E/G par celle de fonctions sur E invariantes sous l'action de G :plus de points mais on étudie les fonctions invariantes c'est la théorie équivariante qui a connu de beaux développements ces trente dernières années .

Exemple 2 Deux exemples de nature géométrique peuvent aussi être invoqués:celui de l'ensemble des pavages de penrose (Figure 4) et celui d'un feuilletage donné (Figure 5)

Dans les deux cas il n'existe pas de structure géométriqe maniable dont chaque point soit un pavage déterminé (dans ce cas Connes a parlé d'espace quantique)ou une feuille du feuilletage fixé Par contre Alain Connes a eu l'idée d'introduire des structures de fonctions à valeurs non-commutatives et qui permettent de décrire algébriquement (avec des outils raffinés qui avaient été mis au point dans la deuxième partie du siècle) les espaces invoqués, un peu comme les coordonnées cartésiennes décrivaient l'espace numérique usuel

Conclusion

Aujourd('hui une partie de la géométrie n'a plus les caractéristiques classiques :oit qu'il s'agisse de la géométrie arithmétique qui vise à développer le plus haut degré d'abstraction pour résoudre les problèmes de théorie des nombres 5Fermat, entre autres),soit

Mais il reste un mystère dans le fonctionnement ;;L'intuition géométrique a pris d'autres détours dans certains domaines de la recherche contemporaine

¿Définition

anneau

catégorie

corps

idéal (maximal,premier)

spectre

catégorie

schéma

topos

Figure 1 Un exemple simple : Prenons le cercle défini par l'équation $X^2 + y^2 = a$

Dont on cherche les solutions (x, y) dans Q par exemple . Si a vaut 1 on a l'équation d'un cercle et beaucoup de points ; mais si a vaut -1 :

Voilà un exemple, de "variété algébrique sans point sur Q (ni point réel).pour Weil, à chaque corps plus gros K contenant k (et des dimension infinie sur k) on associe des points

ENCADRES

REFERENCES